On gauge invariants of Hopf algebras

著者	清水 健一
内容記述	Thesis (Ph. D. in Science)--University of Tsukuba, (A), no. 5619, 2011.3.25 Includes bibliographical references
発行年	2011
URL	http://hdl.handle.net/2241/113123

【98】

氏　名（本籍）	清　水　健　一（山 口 県）
学 位 の 種 類	博　　士（理　　学）
学 位 記 番 号	博　甲　第　5619　号
学位授与年月日	平成 23 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
審 査 研 究 科	数理物質科学研究科
学 位 論 文 題 目	**On gauge invariants of Hopf algebras** （ホップ代数のゲージ不変量について）

主　　　査	筑波大学准教授	博士（数学）	増　岡　　彰
副　　　査	筑波大学教授	理学博士	森　田　　純
副　　　査	筑波大学教授	理学博士	宮　本　雅　彦
副　　　査	筑波大学講師	博士（数学）	相　山　玲　子

論 文 の 内 容 の 要 旨

よく知られているように、群の表現全体はテンソル圏を成し、より一般にホップ代数の表現全体はテンソル圏を成す。ホップ代数全体を分類するのに、同型類によってでなく、その表現圏のテンソル同値によって分類しようとする立場がある。著者はこの立場に立ち、（有限次元）半単純ホップ代数の表現圏やその一般化に対し定義される、Frobenius-Schur 指標（以下 FS 指標と略す）と呼ばれるテンソル同値による不変量―本論文ではゲージ不変量と呼んでいる―を研究している。主要結果として、(1) 群論的圏、(2) 丹原 - 山上圏に対し、正則表現に相当する対象の FS 指標を与える公式を得ている。

研究の背景について述べる。有限群 G が与えられたとき、その複素指標 χ の第 n 次 FS 指標が、複素数 $\chi(g^n)$ の、元 $g \in G$ すべてを渡る平均値 $\Sigma\chi(g^n)/|G|$ として定義される。Frobenius と Schur は、n = 2 の場合のこの指標を用いて、既約表現の実数体上実現可能性判定法を与えた。V. Linchenko と S. Montgomery (2000) は FS 指標の定義と上述の Frobenius らによる結果を、半単純ホップ代数に対し一般化した。（この定義は、群環における元 $g^n \in G$ の平均 $\Sigma g^n/|G|$ を、半単純ホップ代数の正規化積分元の第 n 次 Sweedler 巾に置き換えたもの。）前述したように、ホップ代数の表現全体がテンソル圏をなす事を鑑みると、FS 指標の定義が、適当な条件を満たすテンソル圏に対し、さらに一般化されることが期待できる。実際 S.-H. Ng と P. Schauenburg (2007) は、pivotal（即ち、各対象 V が双対 V* を持ち、かつ自然同型 $V \simeq V^{**}$ を伴うような）テンソル圏の各対象に対し FS 指標を定義し、これが pivotal テンソル同値で不変な量であることを含む、いくつかの基本的性質を示した。しかし、一般化された状況における FS 指標の具体的計算例は非常に乏しかった。どんな圏のどんな対象に対し計算をすればよいかという、動機に欠けていたためと思われる。

そこで著者は、半単純ホップ代数 H の正則表現の n 次 FS 指標 $\nu_n(H)$ に注目し、これを pivotal フュージョン圏 $\mathcal{C}$ に対し一般化して $\nu_n(\mathcal{C})$ を定義し、上記の圏 (1) 及び (2) に対し $\nu_n(\mathcal{C})$ を与える公式を得た。ここでフュージョン圏とは、複素数体上線型な半単純テンソル圏であって、すべての Hom 空間が有限次元で、各対象が双対を持ち、単位対象が単純で、さらに単純対象が有限個からなるものを指す。半単純ホップ代数の表現圏、圏 (1)、(2) はいずれも pivotal フュージョン圏である。著者の定義した $\nu_n(\mathcal{C})$ は、Ng らが定義

するFS指標$\nu_n(V)$　とpivotal次元pdim（V）の積を、すべての単純対象Vに渡ってとる和　$\nu_n(C) = \Sigma\nu_n(V)$ pdim(V)　である。

上記の圏（1）及び（2）　について説明する。有限群Gで次数付けられた有限次元ベクトル空間全体は、G上の3コサイクルが定める結合構造によりテンソル圏を成す。Gの部分群Fの複素体上接合積Aが（然るべき条件を満たすことで）このテンソル圏における代数対象となるとき、両側A加群対象全体が成すようなテンソル圏を群論的と呼ぶ。多くの半単純ホップ代数の表現圏が群論的であることが知られており、実際著者は自ら得た公式を用い、そのようなホップ代数のいくつかについて$\nu_n(H)$を計算している。一方（2）にいう丹原－山上圏とは、両氏（1998）があるフュージョン則を満たすフュージョン圏を分類した際、結果として得られた一連の圏を指し、フュージョン圏の研究に於いて大変重要な具体例である。

審査の結果の要旨

テンソル圏自体は遅くとも1960年代から数学や数理物理学の諸分野で研究されてきた。近年その研究が急速に活発化したのは、1980年代半ばの量子群の発見に伴い、組紐構造、リボン構造といった、テンソル圏上の豊かな付加構造が見いだされ、またテンソル圏の中心化構成といった重要な方法が開発されためと言ってよい。著者はこのような新しい概念や方法を駆使し、「pivotalフュージョン圏のFrobenius-Schur指標」という新しい概念を定義した上で、重要な具体例に対しこの不変量の具体的記述を与えた。これは、研究の一つの方向性を提案する意義深い仕事である。加えて、本論文は丁寧に判りやすく書かれている。

以上により、本論文は博士論文として十分な内容を持つものと評価する。

よって、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。